Minule: LSK: nechť ~~$a_n, b_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$~~ $\exists n_0\ \forall n \geq n_0: a_n, b_n \geq 0$.

nechť existuje $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

(i) $L = 0$: $\sum b_n$ K $\Rightarrow$ $\sum a_n$ K

(ii) $L \in (0,\infty)$: $\Leftrightarrow$

(iii) $L = \infty$ $\Leftarrow$

Příklad: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\boxed{\sin\left(\sqrt{n^2+3n} - n\right)}}{1+\sqrt{n}+n}$ od jistého n_0 > 0.

- $\sqrt{n^2+3n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+3n} - n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}$

$= \frac{3\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2}$

Srovnáme s $b_n = \frac{1}{n}$. $\left(\sum b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin(\sqrt{\dots} - n)}{1+\sqrt{n}+n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(\dots)\cdot \cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)}$

$= \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\right)}{1+0+0} = \sin\frac{3}{2} \in (0,\infty)$.

Tedy LSK: $\sum a_n$ K $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ K.

ale $\sum b_n$ D. ! Tedy $\sum a_n$ D.

Příklad: $\sum (-1)^n \left(1 - \sqrt[n]{5}\right) = \sum a_n$

Pozn.: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a \in (0,\infty)$.

$1 - \sqrt[n]{5} = 1 - 5^{\frac{1}{n}} = 1 - e^{\ln 5^{\frac{1}{n}}} = 1 - e^{\frac{1}{n}\ln 5}$

Známá limita: $\lim\limits_{y\to 0} \frac{e^{\boxed{y}}-1}{\boxed{y}} = 1$.

$|a_n| = -\left(1 - \sqrt[n]{5}\right) = \frac{e^{\boxed{\frac{1}{n}\ln 5}} - 1}{\frac{1}{n}\ln 5} \cdot \frac{1}{n}\ln 5$ $\to 1$

Srovnáme s $b_n = \frac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}\ln 5} - 1}{\frac{1}{n}\ln 5} \cdot \frac{\frac{1}{\cancel{n}}\ln 5}{\frac{1}{\cancel{n}}} = \ln 5 \in (0,\infty)$

LSK: $\left[\sum |a_n| \text{ K.} \iff \sum b_n = \sum \frac{1}{n} \text{ K.}\right]$

Tedy $\sum |a_n|$ D.

Relativní K.? $\quad \sum a_n = \sum (-1)^n \left(1-\sqrt[n]{5}\right)$ $\quad \nu_n \nearrow 0$

Podle Leibnize budeme vědět, že $\sum a_n$ K, pokud $\left(1-\sqrt[n]{5}\right)$ je monotónní a jde k nule.

Víme $\lim \left(1-\sqrt[n]{5}\right) = 0$.

monotónní? Stačí $\sqrt[n]{5} \searrow 1$

$\left[\sqrt[n]{5} = e^{\frac{1}{n}\ln 5}\right]$ $\qquad 1-\sqrt[n]{5} \nearrow 0$.

Tedy podle Leibnizova kritéria $\sum a_n$ K.

Leibnizovo kr.: Jestliže μ_n je monotónní a $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mu_n$ K.

Předp., že víme, že platí L.KR. takto:

$\left[\text{Nechť } \mu_n \searrow 0. \text{ Pak } \sum (-1)^n \mu_n < \infty\right]$

Buďme nyní v situaci, kdy $\nu_n \nearrow 0$ a zajímá nás K. $\sum (-1)^n \nu_n$

Navrhujme $\mu_n := -\nu_n$. Pak $\mu_n \searrow 0$.

Podle [L.KR] konverguje řada

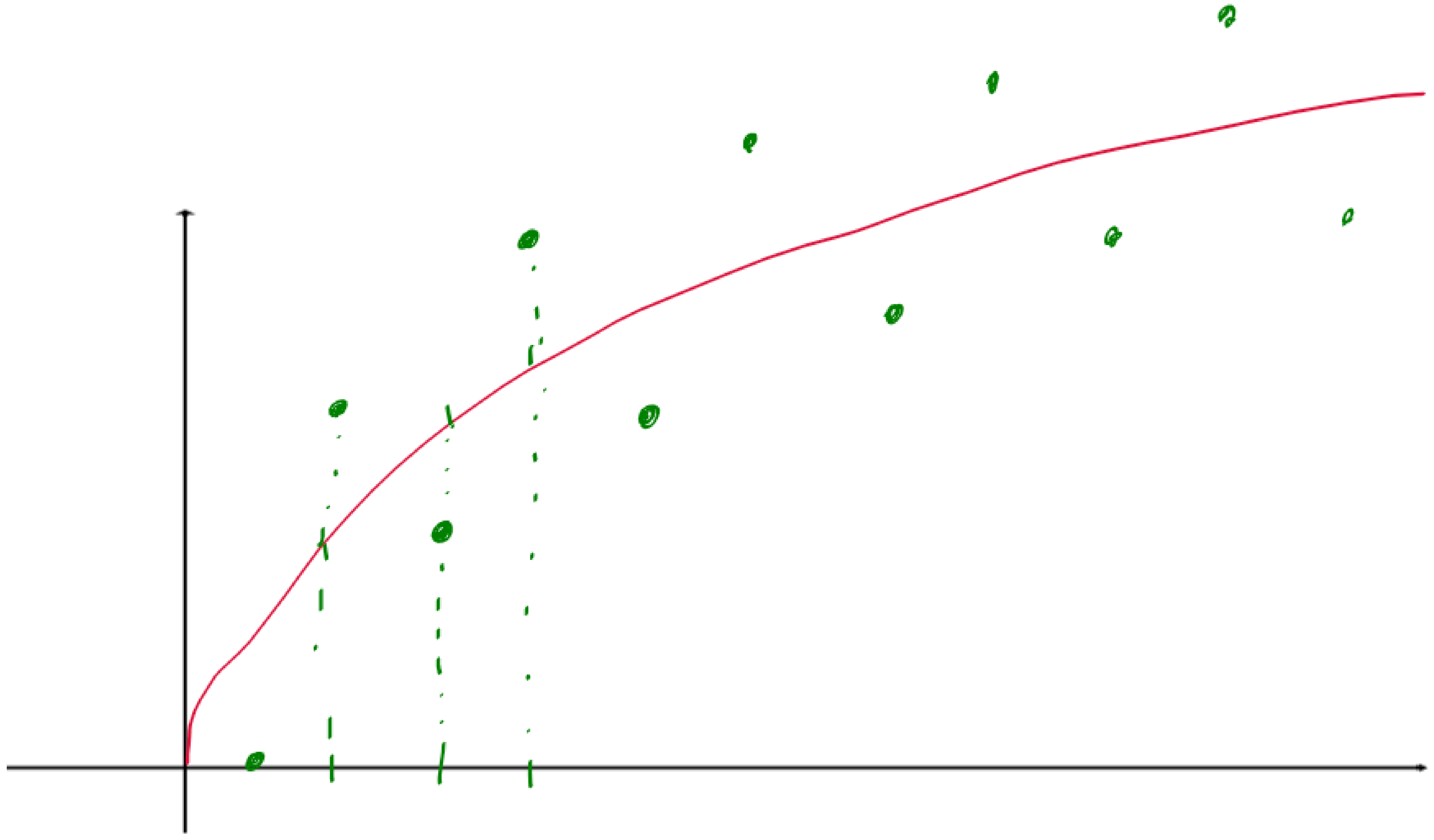
$$\sum (-1)^n \mu_n = \sum (-1)^n (-\nu_n)$$

$$= -\sum (-1)^n \nu_n$$

Tedy $-\sum (-1)^n \nu_n \in \mathbb{R}$, a tedy $\sum (-1)^n \nu_n \in \mathbb{R}$. Tj. K.

[Z288] $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}}_{\lambda_n}$

$\lambda_n \to 0$ ale není monotónní.



nejsou splněny předp. Leibnize.

1. ZPŮSOB: „Chová se podobně jako $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$."

• $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ K. podle L.KR.

• $\displaystyle\underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{a_n} = (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n}-(\sqrt{n}+(-1)^n)}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+(-1)^n)} =$

$\displaystyle= (-1)^n \cdot \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}(-1)^n} = \underbrace{\frac{1}{n+\sqrt{n}(-1)^n}}_{a_n} \geq 0$

Srovnáme s $b_n = \frac{1}{n}$

$\displaystyle\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$, $\underbrace{\sum a_n \ \text{D.}}$

$\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$

$\displaystyle= \underbrace{\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)}_{\text{D.}} + \underbrace{\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{K}}$

Tedy $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ „= D. + K." Tedy D.

2. ZPŮSOB:

$$\boxed{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}} = (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{(\sqrt{n})^2-((-1)^n)^2} =$$

$$= (-1)^n \frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{n-1} =$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{n-1} - (-1)^n \frac{(-1)^n}{n-1} =$$

$$= \underbrace{(-1)^n \overbrace{\frac{\sqrt{n}}{n-1}}^{\text{monot.} \searrow 0}}_{\text{K. podle Leibnize}} - \underbrace{\frac{1}{n-1}}_{\text{D.}}$$

Tedy $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \text{"="} K - D \text{"="} \underline{\underline{D.}}$

Pozn.: Pokud $\sum a_n \text{"="} D + D$, nevíme nic.

Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{(4+(-1)^n)^n} = \sum a_n$

Jmenovatel:

n	1	2	3	4	5
	$(4-1)^1$	$(4+1)^2$	$(4-1)^3$	$(4+1)^4$	$(4-1)^5$

$3^1, 5^2, 3^3, 5^4, 3^5, \dots$

S.K. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ K.?

$$|a_n| = \frac{|\sin n|}{|4+(-1)^n|^n} \leq \frac{1}{3^n} =: b_n$$

$$\sum b_n = \sum \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} < \infty$$

Podle SK. ($\sum b_n$ je konvergentní maj.)
$\sum |a_n|$ K. (Tedy i $\sum a_n$ K.)

POZOR: LSK fungovat nebude.

Zkusme srovnat s $b_n = \frac{1}{3^n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\sin n}{(4+(-1)^n)^n} \cdot 3^n =$$

$$= \lim \frac{\sin n}{\cancel{3^n} \left(\frac{4}{3} + \frac{(-1)^n}{3}\right)^n} \cdot \cancel{3^n} \quad \lim \nexists$$

jiné volby b_n nedají nic lepšího.

Podílové kritérium, odmocninové kr.

Nechť $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$\sum a_n$ K, jestliže platí (i) $\vee$ (ii)

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ (ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

$4 \cdot e^{-2}$

Třeba DK (ii) je postačující: (najdeme)

(ii) $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \sqrt[n]{a_n} < \underline{\underline{q}} < 1$

Tj. $\forall n \geq n_0$: $a_n < q^n$ konv. maj.

ale $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ K $\overset{\text{SR.KR.}}{\Longrightarrow} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ K

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K. $\boxtimes$

[7284]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^{n^2}}{2^n}}_{a_n}$$

$x \in \mathbb{C}$

pro která x K.?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\frac{|x|^{n^2}}{2^n}} = \lim \frac{1}{2} \cdot |x|^n =$$

$|x| < 1$ ... $\lim = 0$ K

$|x| > 1$ ... $\lim = \infty$ D

$|x| = 1$ ... $\lim = 1$ nevíme nic.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{5^{n^2}}$$

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{n!} = n+1$$

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^n}{5^{n^2}}} = \lim \frac{n}{5^n} = 0 \Rightarrow K.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

„když se vyskytuje faktoriál, zkuste podílové"

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\overbrace{2(n+1)}^{2n+2})!}{(n+1)^{\underbrace{2\cdot(n+1)}_{2n+2}}} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)\cdot(2n+1)\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+6n+2}{\underbrace{n^2+2n+1}_{\to 4}} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \overset{?}{=} 4\cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$$

$$4\cdot\Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n}_{(*)}\Big)^2 = 4\cdot e^{-2} < 1$$

$$(*)\ \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = e^{-1}$$

$$\left[\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{-1}{n+1}}{\frac{-1}{n+1}} = \right.$$

$$\left. = \lim \frac{-n}{n+1} = -1\ \right]$$

$\to 1$

Tedy podle podíl. kr. (limitního) řada K. □

$$\sum \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$